Теория игр. Теория графов. Цепи Маркова. Системы массового обслуживания.

Задача 1

181-190. Швейное предприятие реализует свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует a костюмов и b платьев, а при прохладной погоде - c костюмов и d платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны α_0 рублям, а платья - β_0 рублям, цена реализации соответственно равна α_1 рублей и β_1 рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.

$a := 500 \quad b := 1500 \quad c := 900 \quad d := 600 \quad \alpha_0 := 30 \quad \beta_0 := 10$

$\alpha_1 := 50 \quad \beta_1 := 20$

Найдем матрицу доходов предприятия в зависимости от производства и фактической погоды.

Стратегия предприятия в расчете на *теплую погоду* и *фактически теплая погода.* Полностью реализуется вся произведенная продукция

$$A_{0,0} := a\cdot(\alpha_1 - \alpha_0) + b\cdot(\beta_1 - \beta_0) \qquad A_{0,0} = 25000$$

Стратегия предприятия в расчете на *теплую погоду*, а *фактически холодная погода* Доход складывается от полной реализации костюмов и части платьев. Затраты на производство излишков *платьев вычитаются* из дохода

$$A_{0,1} := a\cdot(\alpha_1 - \alpha_0) + d\cdot(\beta_1 - \beta_0) - (b - d)\cdot\beta_0 \qquad A_{0,1} = 7000$$

Стратегия предприятия в расчете на *холодную погоду*, а *фактически теплая погода* Реализуются все платья и часть костюмов. Затраты на производство излишков *костюмов вычитаются* из дохода

$$A_{1,0} := a\cdot(\alpha_1 - \alpha_0) + d\cdot(\beta_1 - \beta_0) - (c - a)\cdot\alpha_0 \qquad A_{1,0} = 4000$$

Стратегия предприятия в расчете на *холодную погоду* и *фактически холодная погода* Полностью реализуется вся произведенная продукция

$$A_{1,1} := c\cdot(\alpha_1 - \alpha_0) + d\cdot(\beta_1 - \beta_0) \qquad A_{1,1} = 24000$$

Платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 25000 & 7000 \\ 4000 & 24000 \end{pmatrix}$$

Игра не имеет седлового элемента (наименьшего в строке и наибольшего в стобце), поэтому по теореме Неймана ее решение существует только в смешанных стратегиях. Найдем решение в смешанных стратегиях

$$A_{0,0}\cdot x + A_{1,0}\cdot(1-x) - A_{0,1}\cdot x - A_{1,1}\cdot(1-x)\ \text{solve},x \rightarrow \frac{10}{19}$$

$$x := \frac{10}{19} \qquad 1 - x \rightarrow \frac{9}{19}$$

$$A_{0,0}\cdot x + A_{1,0}\cdot(1-x) = 15052.63$$ **оптимальный доход (средний выигрыш)**

Оптимальные количества костюмов и платьев

$$a\cdot x + c\cdot(1-x) \rightarrow \frac{13100}{19} = 689.47$$

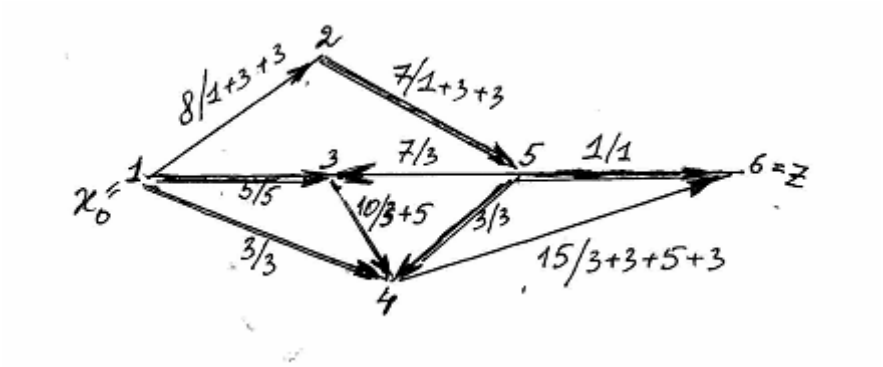
$$b\cdot x + d\cdot(1-x) \rightarrow \frac{20400}{19} = 1073.68$$

Задача 2

191-200.Задана матрица сети G(X, U, C(U)). Построить диаграмму и найти *максимальный поток и максимальный разрез.*

N	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,4)	(4,6)	(5,3)	(5,4)	(5,6)
	8	5	3	7	10	15	7	3	1

Решение. Построим диаграмму (орграф) транспортной сети и, применяя алгоритм Форда-Фалкерсона найдем максимальный поток.



На каждом шаге выбираем путь и пускаем поток по нему, такой чтобы появилась по крайней мере одна *насыщенная* дуга (на диаграмме выделены жирно). Последовательные пути с соответствующими потоками запивываем в строках таблицы №1

Таблица №1

N	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,4)	(4,6)	(5,3)	(5,4)	(5,6)
	8	5	3	7	10	15	7	3	1
1	+1			+1					+1
2	+3			+3		+3		+3	
3	+3			+3	+3	+3	+3		
4		+5			+5	+5			
5			+3			+3			
	7	5	3	7	8	14	3	3	1

Помечаем вершины, начиная с 1. Результаты запишем в таблице №2

Таблица №2

N	x_0=1	2	3	4	5	6	*Z=6*
6	+0	+0					

Вершина *z не* помечена*, по*этому ***нет маршрута прорыва***.
Следовательно, ранее полученный поток ***является максимальным.***

Величина максимального потока - сумма потоков по дугам из источника

$$7 + 5 + 3 = 15$$

равна, также, сумме потоков по дугам, входящим в сток:

$$1 + 14 = 15.$$

Минимальный разрез: (A, B) = ({1,2}, {3,4,5,6}).
Пропускная способность минимального разреза равна величине максимального потока (теорема Форда-Фалкерсона):

$$c(A, B) = 5 + 3 + 7 = 15.$$

Задача 3

201-210. В зависимости от величины процентных ежеквартальных ставок банк может находиться в одном из трех состояний S_1, S_2 ,S_3 в соответствии с заданной матрицей перехода

$$P_1 := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}, S_2.$$

В конце года банк находится в одном из соотояний S_1, S_2 ,S_3 .
Найти вероятности состояний S_1, S_2 ,S_3 банка через год.

Решение.

$$S_2 := (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$S := S_2 \cdot P_1 \qquad S = (0.8 \quad 0.1 \quad 0.1)$$

Задача 4

211-220. Магазин получает овощи из теплиц. Автомобили с грузом прибывают с интенсивностью λ машин в день. Подсобные помещения позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный m автомобилями. В магазине работают n фасовщиков, каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $t_{обсл}$ часов. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 часов. Проверить удовлетворяет ли заданная емкость подсобных помещений требуемой вероятности P* полной обработки товара, в случае неудовлетворения - наайти емкость m, необходимую для выполнения требуемой вероятности P*.

$\lambda := 5$ авт/ день $\quad m := 2 \quad n := 2 \quad t_{обсл} := 3 \quad P_{обсл} := 0.97$

$$k := n$$

$$\mu := \frac{12}{t_{обсл}} \qquad \mu = 4 \text{ авт/ день}$$

$$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 1.25 \qquad \chi := \frac{\rho}{k} \qquad \chi = 0.625$$

1) вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок)

$$p_0 := \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1} \cdot \left(1 - \chi^m\right)}{k!\, k \cdot (1 - \chi)} \right]^{-1} \qquad p_0 = 0.2615$$

вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк} := \frac{\rho^{k+m} \cdot p_0}{k!\, k^m} \qquad P_{отк} = 0.0798$$

2) вероятность обслуживания

$$P_{обсл} := 1 - P_{отк} \qquad P_{обсл} = 0.9202$$

Так как $P_{обсл} = 0.9202$ < 0.97, то емкость подсобных помещений НЕ является достаточеной. Произведем аналогичные вычисления для m = 3

$m := 3$

$$p_0 := \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1} \cdot \left(1 - \chi^m\right)}{k!\, k \cdot (1 - \chi)} \right]^{-1} \qquad p_0 = 0.249$$

$$P_{отк} := \frac{\rho^{k+m} \cdot p_0}{k!\, k^m} \qquad P_{отк} = 0.0475$$

$$P_{обсл} := 1 - P_{отк} \qquad P_{обсл} = 0.9525$$

Произведем аналогичные вычисления для m = 4

$m := 4$

$$p_0 := \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1} \cdot \left(1 - \chi^m\right)}{k!\, k \cdot (1 - \chi)} \right]^{-1} \qquad p_0 = 0.2419$$

$$P_{отк} := \frac{\rho^{k+m} \cdot p_0}{k!\, k^m} \qquad P_{отк} = 0.0288$$

$$P_{обсл} := 1 - P_{отк} \qquad P_{обсл} = 0.9712$$

Ответ: оптимальной является емкость подсобных помещений при m =4.

Задача 5

221-230. В мастерской по ремонту холодильников работает n мастеров. В среднем в течение дня поступает в ремонт λ холодильников. Поток заявок пуассоновский. Время ремонта подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей, в среднем в течение дня при семичасовом рабочем дне каждый из мастеров ремонтирует μ холодильников. Требуется определить:
1) вероятность того, что все мастера свободны от ремонта холодильников,
2) вероятность того, что все мастера заняты ремонтом,
3) среднее время ремонта одного холодильника,
4) в среднем время ожидания начала ремонта для каждого холодильника,
5) среднюю длину очереди, которая определяет необходимое место для хранения холодильника, требующего ремонта,
6) среднее число мастеров, свободных от работы.

$n := 5$ $\lambda := 8$ $\mu := 2$

$k := n$ $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ $\rho = 4$ $\chi := \frac{\rho}{k}$ $\chi = 0.8$

Так как $\chi = 0.8 < 1$, то существует стационарный режим.

Предельное распределение вероятностей состояний вычисляется по формулам:

$$p_0 := \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1}}{k!\, k \cdot (1-\chi)} \right]^{-1} \qquad p_0 = 0.013$$

$$i := 0, 1 .. k \qquad p_i := \frac{\rho^i}{i!} \cdot p_0 \qquad p_{k+i} := \frac{\rho^{k+i}}{k!\, k^i} \cdot p_0$$

1) При $k = 5$ получим вероятность того, что все мастера свободны от ремонта холодильников:

$$p_0 = 0.013$$

2)Вычислим вероятность того, что все мастера заняты ремонтом.

Очевидно, она равна сумме вероятностей таких событий: все мастера заняты , очереди нет (p_k); все все мастера заняты, один холодильник в очереди (p_{k+1}); все все мастера заняты два холодильника в очереди (p_{k+2}) и так далее. Поскольку для полной группы событий сумма вероятностей этих событий равна единице, то справедливо равенство

$Pz = p_k + p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots = 1 - p_o - p_1 - p_2 - p_3 - \ldots - p_{k-1}$,

$$Pz := 1 - \sum_{i=0}^{k-1} p_i \qquad Pz = 0.5541$$

Можно воспользоваться следующей формулой, по которой расчет короче:

$$Pz := \frac{\rho^k \cdot p_0}{k! \cdot (1-\chi)} \qquad Pz = 0.5541$$

3) среднее время ремонта одного холодильника

$$t_{обсл} := \frac{1}{\mu} \qquad t_{обсл} = 0.5 \text{ раб. дня} \quad \text{или} \quad t_{обсл} \cdot 7 = 3.5 \text{ часов}$$

4) в среднем время ожидания начала ремонта для каждого холодильника (Литтл)

$$r := \frac{\rho^{k+1}}{k! \cdot k} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{(1-\chi)^2}$$

$$t_{ож} := \frac{r}{\lambda} \qquad t_{ож} = 0.2771 \text{ раб. дня} \quad \text{или} \quad t_{ож} \cdot 7 = 1.9394 \text{ часов}$$

Можно также воспользоваться следующей формулой:

$$t_{ож} := \frac{Pz \cdot \chi}{\lambda(1-\chi)} \qquad t_{ож} = 0.2771 \text{ раб. дня} \quad \text{или } t_{ож} \cdot 7 = 1.9394 \text{ часов}$$

5) средняя длина очереди, которая определяет необходимое место для хранения холодильника, требующего ремонта,

$$r := \frac{p_{k+1}}{(1-\chi)^2} \quad \text{или} \quad r := \frac{\rho^{k+1}}{k! \cdot k} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{(1-\chi)^2}$$

$$p_{k+1} = 0.0887 \qquad r = 2.2165$$

Можно также воспользоваться следующей формулой:

$$r := \frac{Pz \cdot \chi}{1-\chi} \qquad r = 2.2165$$

6) среднее число мастеров, свободных от работы.

$$N_0 := k - \rho \qquad N_0 = 1$$

Задача 6

231-240. Рабочий обслуживает m станков. Поток требований на обслуживание пуассоновский с параметром λ станков в час. Время обслуживания одного станка подчинено экспоненциальному закону. Среднее время обслуживания одного станка равно t минут. Определить: 1) среднее число станков, ожидающих обслуживания, 2) коэффициент простоя станка, 3) коэффициент простоя рабочего.

$n := 1 \qquad m := 4 \qquad \lambda := 2 \qquad t := 4$ мин. $\Rightarrow$

$$t := \frac{t}{60} \text{час.} \quad t = 0.0667 \text{ час.} \qquad \text{Найдем } \rho := \lambda \cdot t \Rightarrow \quad \rho = 0.1333$$

Решение.

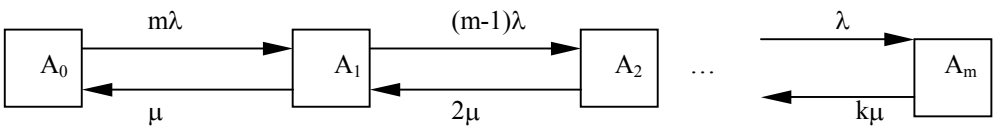
Вычислим вероятность того, что все к =n=1 каналов (рабочих) свободны.

Обозначим состояния СМО по числу занятых рабочих: A_0 — все рабочие свободны; A_1 —один занят; A_2 — два заняты и т.д. ... A_{k+1} - k заняты, 1 станок в очереди и т.д. A_m - k рабочих заняты, m-k станков в очереди.

Так как потоки отказов и ремонта являются простейшими, то их интенсивности вычисляются по формулам:

λ = 1/M[T] (требов./час); μ = 1/M[$T_{обсл}$] (обсл. ст./час)

Размеченный граф состояний изображен на рис.



Поскольку в состоянии A_0 работают все m станков, каждый из которых может отказать с интенсивностью λ, то СМО переходит из состояния A_0 в состояние A_1 с

интенсивностью $m\lambda$; переход A_1 в A_2 происходит с интенсивностью $(m-1)\lambda$ и т.д.

Из состояния A_m в состояние A_{m-1} система переходит с интенсивностью $k\mu$,так как обслуживаются k станков (при k<m); и т.д... переход A_1 в A_0 происходит с интенсивностью μ . Полученный граф состояний является графом процесса гибели и размножения с числом состояний m + 1. Воспользуемся формулами для вычисления предельного распределения вероятностей графа процесса гибели и размножения получим.

$$p_0 := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{m! \cdot \rho^k}{k! \cdot (m-k)!} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m! \cdot \rho^k}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!} \right)^{-1}$$

$k := 0 .. n$

$k =$

0
1

$$\frac{m! \cdot \rho^k}{k! \cdot (m-k)!} =$$

1
0.5333

$k := n+1 .. m$

$k =$

2
3
4

$$\frac{m! \cdot \rho^k}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!} =$$

0.2133
0.0569
$7.5852 \cdot 10^{-3}$

$$p_0 = 0.5521$$

1) среднее число станков, ожидающих обслуживания

$k := n+1 .. m$ $\quad p_k := \frac{m! \cdot \rho^k p_0}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!}$

$k =$

2
3
4

$p_k =$

0.1178
0.0314
0.0042

$$m_{оч} := \sum_{k=n+1}^{m} (k-n) \cdot p_k \quad \Rightarrow \quad m_{оч} = 0.1932$$

2) коэффициент простоя станка

$$K_{пр.об.} := \frac{m_{оч}}{m} \qquad m_{оч} = 0.1932 \quad \Rightarrow \quad K_{пр.об.} = 0.0483$$

$$m = 4$$

3) Коэффициент простоя рабочего найдем через среднее число свободных каналов (рабочих):

$$N_0 := \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot p_k \qquad n = 1 \text{ поэтому } N_0 = p_0 = 0.5521$$

Коэффициент простоя рабочего: $K_{пр.кан.} := \frac{N_0}{n}$

$n = 1$ поэтому $K_{пр.кан.} = N_0 = p_0 = 0.5521$