

Теория игр. Теория графов. Цепи Маркова. Системы массового обслуживания.

Задача 1

181-190. Швейное предприятие реализует свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует а костюмов и b платьев, а при прохладной погоде - с костюмов и d платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны α_0 рублям, а платья - β_0 рублям, цена реализации соответственно равна α_1 рублей и β_1 рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.

$$a := 500 \quad b := 1500 \quad c := 900 \quad d := 600 \quad \alpha_0 := 30 \quad \beta_0 := 10 \\ \alpha_1 := 50 \quad \beta_1 := 20$$

Найдем матрицу доходов предприятия в зависимости от производства и фактической погоды.

Стратегия предприятия в расчете на *теплую погоду* и *фактически теплая погода*. Полностью реализуется вся произведенная продукция

$$A_{0,0} := a \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) + b \cdot (\beta_1 - \beta_0) \quad A_{0,0} = 25000$$

Стратегия предприятия в расчете на *теплую погоду*, а *фактически холодная погода*. Доход складывается от полной реализации костюмов и части платьев. Затраты на производство излишков *платьев вычитаются* из дохода

$$A_{0,1} := a \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) + d \cdot (\beta_1 - \beta_0) - (b - d) \cdot \beta_0 \quad A_{0,1} = 7000$$

Стратегия предприятия в расчете на *холодную погоду*, а *фактически теплая погода*. Реализуются все платья и часть костюмов. Затраты на производство излишков *костюмов вычитаются* из дохода

$$A_{1,0} := a \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) + d \cdot (\beta_1 - \beta_0) - (c - a) \cdot \alpha_0 \quad A_{1,0} = 4000$$

Стратегия предприятия в расчете на *холодную погоду* и *фактически холодная погода*. Полностью реализуется вся произведенная продукция

$$A_{1,1} := c \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) + d \cdot (\beta_1 - \beta_0) \quad A_{1,1} = 24000$$

Платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 25000 & 7000 \\ 4000 & 24000 \end{pmatrix}$$

Игра не имеет седлового элемента (наименьшего в строке и наибольшего в столбце), поэтому по теореме Неймана ее решение существует только в смешанных стратегиях. Найдем решение в смешанных стратегиях

$$A_{0,0} \cdot x + A_{1,0} \cdot (1 - x) - A_{0,1} \cdot x - A_{1,1} \cdot (1 - x) \text{ solve, } x \rightarrow \frac{10}{19}$$

$$x := \frac{10}{19} \quad 1 - x \rightarrow \frac{9}{19}$$

$$A_{0,0} \cdot x + A_{1,0} \cdot (1 - x) = 15052.63 \quad \text{оптимальный доход (средний выигрыш)}$$

Оптимальные количества костюмов и платьев

$$a \cdot x + c \cdot (1 - x) \rightarrow \frac{13100}{19} = 689.47$$

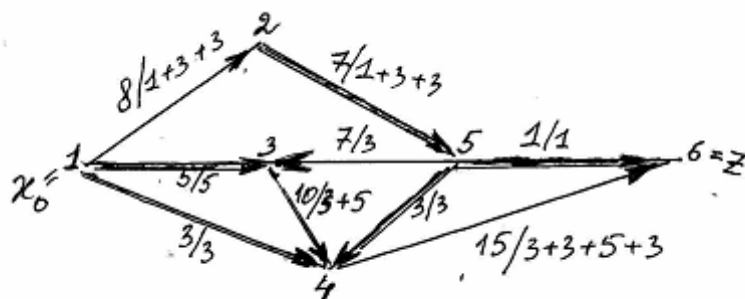
$$b \cdot x + d \cdot (1 - x) \rightarrow \frac{20400}{19} = 1073.68$$

Задача 2

191-200. Задана матрица сети $G(X, U, C(U))$. Построить диаграмму и найти *максимальный поток и минимальный разрез*.

N	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,4)	(4,6)	(5,3)	(5,4)	(5,6)
	8	5	3	7	10	15	7	3	1

Решение. Построим диаграмму (орграф) транспортной сети.



Данная транспортная сеть имеет один **источник** $s = x_0$ - вершина 1 и **один сток** $t = z$ - вершина 6.

Для нахождения максимального потока будем **применять** алгоритм Форда-Фалкерсона.

На каждом шаге N выбираем путь и пускаем по нему поток, такой чтобы появилась по крайней мере одна **насыщенная** дуга, т.е. дуга поток, по которой совпадает с пропускной способностью (на диаграмме выделены жирно). Последовательные пути с соответствующими потоками записываем в строках таблицы №1, а также на диаграмме через знак дроби.

Таблица №1

N	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,4)	(4,6)	(5,3)	(5,4)	(5,6)
	8	5	3	7	10	15	7	3	1
1	+1			+1					+1
2	+3			+3		+3		+3	
3	+3			+3	+3	+3	+3		
4		+5			+5	+5			
5			+3			+3			
	7	5	3	7	8	14	3	3	1

Помечаем вершины, начиная с 1. Вершине 1 присваиваем пометку +1. Из вершины 1 идет одна ненасыщенная дуга (1, 2). Вершине 2 присваиваем пометку +2. Из вершины 2 нет ненасыщенных дуг поэтому останавливаем процесс присваивания пометок.

Таблица №2

	$x_0=1$	2	3	4	5	6	$z=6$
	+1	+2					

Вершина z не помечена, следовательно, **нет маршрута прорыва** и ранее полученный поток **является максимальным**.

Величина максимального потока - сумма потоков по дугам из источника

$$7 + 5 + 3 = 15.$$

Эта величина равна, также, сумме потоков по дугам, входящим в сток:

$$1 + 14 = 15.$$

Разрез (s-t cut) — разбиение(A, B) множества всех вершин V на два подмножества, A и B, таких что источник $s=1$ принадлежит A, а сток $t=6$ принадлежит B.

Пропускная способность разреза (A,B) (the capacity of an s-t cut (A,B)) — сумма пропускных способностей всех рёбер из A в B.

Минимальный разрез имеет наименьшую пропускную способность. Для получения минимального разреза в множество A включаем помеченные вершины из таблицы №2. Оставшиеся вершины образуют множество B.

$$(A, B) = (\{1,2\}, \{3,4,5,6\})$$

По теореме Форда-Фалкерсона пропускная способность минимального разреза равна величине максимального потока. Складываем пропускные способности дуг из A в B и получаем пропускную способность минимального разреза:

$$c(A, B) = c(1,3) + c(1,4) + c(2,5) = 5 + 3 + 7 = 15.$$

Заметим, что дуги из A в B - это *насыщенные* дуги, выходящие из A.

Задача 3

201-210. В зависимости от величины процентных **ежеквартальных** ставок банк может находиться в одном из трех состояний S_1, S_2, S_3 в соответствии с заданной матрицей перехода

$$P_1 := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}, S_2.$$

В конце года банк находится в одном из состояний S_1, S_2, S_3 .
Найти вероятности состояний S_1, S_2, S_3 банка через год.

Решение. По условию:

$$S_2 := (0 \quad 1 \quad 0)$$

К концу первого квартала:

$$S1 := S_2 \cdot P_1 \quad S1 = (0.8 \quad 0.1 \quad 0.1)$$

К концу второго квартала:

$$S2 := S1 \cdot P_1 \quad S2 = (0.18 \quad 0.27 \quad 0.63)$$

К концу третьего квартала:

$$S3 := S2 \cdot P_1 \quad S3 = (0.36 \quad 0.207 \quad 0.531)$$

К концу четвертого квартала, т.е. к концу года:

$$S4 := S3 \cdot P_1 \quad S4 = (0.3078 \quad 0.2349 \quad 0.5913)$$

Возможен также расчет по более трудоемкой формуле:

$$S := S_2 \cdot P_1^4 \quad S = (0.3078 \quad 0.2349 \quad 0.5913)$$

Задача 4

211-220. Магазин получает овощи из теплиц. Автомобили с грузом прибывают с интенсивностью λ машин в день. Подсобные помещения позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный m автомобилями. В магазине работают n фасовщиков, каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $t_{\text{обсл}}$ часов. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 часов. Проверить удовлетворяет ли заданная емкость подсобных помещений требуемой вероятности P^* полной обработки товара, в случае неудовлетворения - найти емкость m , необходимую для выполнения требуемой вероятности P^* .

$$\lambda := 5 \text{ авт/день} \quad m := 2 \quad n := 2 \quad t_{\text{обсл}} := 3 \quad P_{\text{обсл}} := 0.97$$

$$k := n \quad \mu := \frac{12}{t_{\text{обсл}}} \quad \mu = 4 \text{ авт/день}$$

$$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \quad \rho = 1.25 \quad \chi := \frac{\rho}{k} \quad \chi = 0.625$$

1) вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок)

$$p_0 := \left[\sum_{i=0}^k \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1} \cdot (1 - \chi^m)}{k! \cdot k \cdot (1 - \chi)} \right]^{-1} \quad p_0 = 0.2615$$

вероятность отказа в обслуживании

$$P_{\text{отк}} := \frac{\rho^{k+m} \cdot p_0}{k! \cdot k^m} \quad P_{\text{отк}} = 0.0798$$

2) вероятность обслуживания

$$P_{\text{обсл}} := 1 - P_{\text{отк}} \quad P_{\text{обсл}} = 0.9202$$

Так как $P_{\text{обсл}} = 0.9202 < 0.97$, то емкость подсобных помещений НЕ является достаточной. Произведем аналогичные вычисления для $m = 3$ и далее вплоть до получения достаточной емкости.

$$m := 3$$

$$p_0 := \left[\sum_{i=0}^k \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1} \cdot (1 - \chi^m)}{k! \cdot k \cdot (1 - \chi)} \right]^{-1} \quad p_0 = 0.249$$

$$P_{\text{отк}} := \frac{\rho^{k+m} \cdot p_0}{k! \cdot k^m} \quad P_{\text{отк}} = 0.0475$$

$$P_{\text{обсл}} := 1 - P_{\text{отк}} \quad P_{\text{обсл}} = 0.9525$$

Произведем аналогичные вычисления для $m = 4$

$$m := 4$$

$$p_0 := \left[\sum_{i=0}^k \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1} \cdot (1 - \chi^m)}{k! \cdot k \cdot (1 - \chi)} \right]^{-1} \quad p_0 = 0.2419$$

$$P_{\text{отк}} := \frac{\rho^{k+m} \cdot p_0}{k! \cdot k^m} \quad P_{\text{отк}} = 0.0288$$

$$P_{\text{обсл}} := 1 - P_{\text{отк}} \quad P_{\text{обсл}} = 0.9712$$

Ответ: оптимальной является емкость подсобных помещений при $m = 4$.

Задача 5

221-230. В мастерской по ремонту холодильников работает n мастеров. В среднем в течение дня поступает в ремонт λ холодильников и при семичасовом рабочем дне каждый из мастеров ремонтирует μ холодильников. Требуется:

1. Проверить исходные данные на адекватность условиям применения математической модели системы массового обслуживания.
2. В случае неадекватности принять решение по управлению системой массового обслуживания с целью приведения ее в соответствие с условиями применения описывающей математической модели.
3. Рассчитать характеристики эффективности системы массового обслуживания:
 - 1) вероятность того, что все мастера свободны от ремонта холодильников,
 - 2) вероятность того, что все мастера заняты ремонтом,
 - 3) среднее время ремонта одного холодильника,
 - 4) в среднем время ожидания начала ремонта для каждого холодильника,
 - 5) среднюю длину очереди,
 - 6) среднее число мастеров, свободных от работы.

$$n := 3 \quad \lambda := 8 \quad \mu := 2$$

1. Проверим исходные данные на адекватность условиям применения математической модели системы массового обслуживания.

$$k := n \quad \rho := \frac{\lambda}{\mu} \quad \rho = 4 \quad \chi := \frac{\rho}{k} \quad \chi = 1.3333$$

Так как $\chi = 1.3333 > 1$ или $k = 3 < \rho = 4$, то **НЕ существует стационарный режим**. Очередь будет неограниченно возрастать.

Т.о. исходные данные **не являются адекватными** условиям применения математической модели системы массового обслуживания.

2.Примем решение по управлению системой массового обслуживания с целью приведения ее в соответствие с условиями применения описывающей математической модели. Нужно получить неравенство

$$k > \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

На интенсивность λ потока холодильников, требующих ремонта мы повлиять не можем. Достаточно либо увеличить количество мастеров k , либо увеличить производительность труда μ каждого из мастеров, внедряя более производительные технологии. Примем на работу еще 2-х мастеров:

$$k := 3 + 2 \quad \text{Тогда } k = 5 > \rho = 4 \quad \text{и, следовательно, из } \chi := \frac{\rho}{k} \quad \text{получим}$$

$$\chi = 0.8 < 1.$$

3. Рассчитаем характеристики эффективности системы массового обслуживания:
Найдем предельное распределение вероятностей состояний :

1) вероятность того, что все мастера свободны от ремонта холодильников,

$$p_0 := \left[\sum_{i=0}^k \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1}}{k! \cdot k \cdot (1 - \chi)} \right]^{-1} \quad p_0 = 0.013$$

Вероятности других состояний

$$i := 0, 1 \dots k \quad p_i := \frac{\rho^i}{i!} \cdot p_0 \quad p_{k+i} := \frac{\rho^{k+i}}{k! \cdot k^i} \cdot p_0$$

2) Вычислим вероятность того, что все мастера заняты ремонтом.

Эта вероятность P_z равна сумме вероятностей следующих событий:

все мастера заняты, очереди нет (p_k);

все мастера заняты, один холодильник в очереди (p_{k+1});

все мастера заняты два холодильника в очереди (p_{k+2}) и так далее.

$$P_z = p_k + p_{k+1} + p_{k+2} + \dots$$

Для полной группы событий сумма вероятностей всех событий равна единице, поэтому справедливо также равенство:

$$P_z = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_{k-1},$$

$$P_z := 1 - \sum_{i=0}^{k-1} p_i \quad P_z = 0.5541$$

Можно воспользоваться следующей формулой, по которой расчет короче:

$$P_z := \frac{\rho^k \cdot p_0}{k! \cdot (1 - \chi)} \quad P_z = 0.5541$$

3) среднее время ремонта одного холодильника

$$t_{\text{обсл}} := \frac{1}{\mu} \quad t_{\text{обсл}} = 0.5 \text{ раб. дня} \quad \text{или} \quad t_{\text{обсл}} \cdot 7 = 3.5 \text{ часов}$$

4) в среднем время ожидания начала ремонта для каждого холодильника (Литтл)

$$r := \frac{\rho^{k+1}}{k! \cdot k} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{(1-\chi)^2}$$

$$t_{\text{ож}} := \frac{r}{\lambda} \quad t_{\text{ож}} = 0.2771 \text{ раб. дня} \quad \text{или} \quad t_{\text{ож}} \cdot 7 = 1.9394 \text{ часов}$$

Можно также воспользоваться следующей формулой:

$$t_{\text{ож}} := \frac{Pz \cdot \chi}{\lambda(1-\chi)} \quad t_{\text{ож}} = 0.2771 \text{ раб. дня} \quad \text{или} \quad t_{\text{ож}} \cdot 7 = 1.9394 \text{ часов}$$

5) средняя длина очереди, которая определяет необходимое место для хранения холодильника, требующего ремонта,

$$r := \frac{p_{k+1}}{(1-\chi)^2} \quad \text{или} \quad r := \frac{\rho^{k+1}}{k! \cdot k} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{(1-\chi)^2}$$

$$p_{k+1} = 0.0887 \quad r = 2.2165$$

Можно также воспользоваться следующей формулой:

$$r := \frac{Pz \cdot \chi}{1-\chi} \quad r = 2.2165$$

6) среднее число мастеров, свободных от работы.

$$N_0 := k - \rho \quad N_0 = 1$$

Задача 6

231-240. Рабочий обслуживает m станков. Поток требований на обслуживание пуассоновский с параметром λ станков в час. Время обслуживания одного станка подчинено экспоненциальному закону. Среднее время обслуживания одного станка равно t минут. Определить: 1) среднее число станков, ожидающих обслуживания, 2) коэффициент простоя станка, 3) коэффициент простоя рабочего.

$$n := 1 \quad m := 4 \quad \lambda := 2 \quad t := 4 \text{ мин.} \Rightarrow$$

$$t := \frac{t}{60} \text{ час.} \quad t = 0.0667 \text{ час.} \quad \text{Найдем } \rho := \lambda \cdot t \Rightarrow \rho = 0.1333$$

Решение.

Вычислим вероятность того, что все $k=n=1$ каналов (рабочих) свободны.

Обозначим состояния СМО по числу занятых рабочих: A_0 — все рабочие свободны;

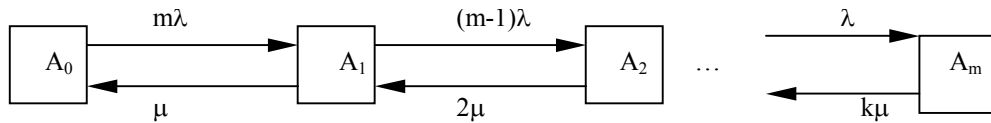
A_1 — один занят; A_2 — два заняты и т.д. ... A_{k+1} — k заняты, 1 станок в очереди и т.д.

A_m — k рабочих заняты, $m-k$ станков в очереди.

Так как потоки отказов и ремонта являются простейшими, то их интенсивности вычисляются по формулам:

$$\lambda = 1/M[T] \text{ (требов./час); } \mu = 1/M[T_{\text{обсл}}] \text{ (обсл. ст./час)}$$

Размеченный граф состояний изображен на рис.



Поскольку в состоянии A_0 работают все m станков, каждый из которых может отказать с интенсивностью λ , то СМО переходит из состояния A_0 в состояние A_1 с интенсивностью $m\lambda$; переход A_1 в A_2 происходит с интенсивностью $(m-1)\lambda$ и т.д.

Из состояния A_m в состояние A_{m-1} система переходит с интенсивностью $k\mu$, так как обслуживаются k станков (при $k < m$); и т.д... переход A_1 в A_0 происходит с интенсивностью μ . Полученный граф состояний является графом процесса гибели и размножения с числом состояний $m + 1$. Воспользуемся формулами для вычисления предельного распределения вероятностей графа процесса гибели и размножения получим.

$$p_0 := \left(\sum_{k=0}^n \frac{m! \cdot \rho^k}{k! \cdot (m-k)!} + \sum_{k=n+1}^m \frac{m! \cdot \rho^k}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!} \right)^{-1}$$

$$k := 0 \dots n$$

$$k = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \frac{m! \cdot \rho^k}{k! \cdot (m-k)!} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0.5333 \\ \hline \end{array}$$

$$k := n + 1 \dots m$$

$$k = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \frac{m! \cdot \rho^k}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!} = \begin{array}{|c|} \hline 0.2133 \\ \hline 0.0569 \\ \hline 7.5852 \cdot 10^{-3} \\ \hline \end{array}$$

$$p_0 = 0.5521$$

1) среднее число станков, ожидающих обслуживания

$$k := n + 1 \dots m \quad p_k := \frac{m! \cdot \rho^k p_0}{n^{k-n} \cdot n! \cdot (m-k)!}$$

$$k = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad p_k = \begin{array}{|c|} \hline 0.1178 \\ \hline 0.0314 \\ \hline 0.0042 \\ \hline \end{array}$$

$$m_{\text{оч}} := \sum_{k=n+1}^m (k-n) \cdot p_k$$

$\Rightarrow$

$$m_{\text{оч}} = 0.1932$$

2) коэффициент простоя станка

$$K_{\text{пр.об.}} := \frac{m_{\text{оч}}}{m} \quad m_{\text{оч}} = 0.1932 \quad \Rightarrow \quad K_{\text{пр.об.}} = 0.0483$$
$$m = 4$$

3) Коэффициент простоя рабочего найдем через среднее число свободных каналов (рабочих):

$$N_0 := \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot p_k \quad n = 1 \quad \text{поэтому} \quad N_0 = p_0 = 0.5521$$

$$\text{Коэффициент простоя рабочего: } K_{\text{пр.кан.}} := \frac{N_0}{n}$$
$$n = 1 \quad \text{поэтому} \quad K_{\text{пр.кан.}} = N_0 = p_0 = 0.5521$$